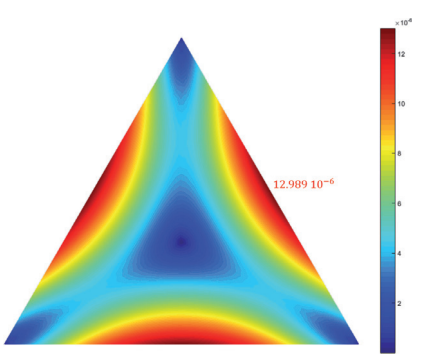
Erick Ringot
avec Bernard Husson
et Thierry Vidal

CALCUL DES OUVRAGES APPLICATIONS

Exercices et problèmes résolus de résistance des matériaux et de calcul des structures



EYROLLES

Erick Ringot, avec Bernard Husson et Thierry Vidal

CALCUL DES OUVRAGES : APPLICATIONS

Exercices et problèmes résolus de résistance des matériaux et de calcul des structures

Précédés d'une brève introduction à la mécanique générale, les **110 exercices et problèmes résolus** rassemblés ici embrassent un large panel d'applications, tant dans le domaine de la résistance des matériaux que dans celui du **calcul des ossatures**. Un éclairage particulier est apporté aux applications associées aux questions de **stabilité**, de **sismique** et d'**élastoplasticité**. Inspirés de situations réelles, les exemples sont originaux. Abondamment illustrés, ils sont systématiquement complétés par des **applications numériques**. Chaque fois que nécessaire, les **développements mathématiques** utiles aux résolutions sont détaillés.

Tous les sujets dont ce volume inédit est composé ont été conçus et expérimentés par l'équipe en charge de l'enseignement de la résistance des matériaux, du calcul des ouvrages béton et des constructions mixtes à l'université Paul Sabatier de Toulouse. Ils illustrent le manuel de cours intitulé Calcul des ouvrages.

I. Mécanique générale. II. Statique. III. Théorie des poutres. IV. Cisaillement de flexion. V. Torsion. VI. Applications directes du principe des puissances virtuelles. VII. Méthode des forces. VIII. Méthode des déplacements. IX. Stabilité en régime élastique. X. Problèmes de synthèse

Ancien élève de l'École normale supérieure Paris-Orsay, professeur des universités, **Erick Ringot** enseigne la mécanique appliquée en licence et master de génie civil de l'université de Toulouse. Ses travaux de recherche portent aujourd'hui sur le sujet sensible de la qualité de l'air extérieur et dans les habitacles ainsi que sur les systèmes de protection des ouvrages en béton armé contre la corrosion. Il est très impliqué dans la valorisation de la recherche ; ses travaux ont donné lieu à la création de deux entreprises à technologie innovante qu'il codirige avec ses anciens étudiants de thèse.

Agrégé de génie civil et docteur-ingénieur Insa, **Bernard Husson** est actuellement maître de conférences habilité à diriger les recherches à l'université Toulouse 3 – Paul Sabatier (UPS). Il effectue l'intégralité de son enseignement dans les filières génie civil de l'université (licence – master et 2e et 3e années de l'Upssitech, école interne d'ingénieurs de l'UPS) ; les principales disciplines enseignées sont le calcul des structures et le calcul du béton armé. Il est rattaché au laboratoire Matériaux et durabilité des constructions (LMDC – UPS-Insa Toulouse) où il travaille principalement sur la valorisation de sous-produits industriels et miniers dans les bétons et les matériaux de construction routière.

Docteur-ingénieur INSA en génie civil, **Thierry Vidal** est maître de conférences à l'université Toulouse 3 – Paul Sabatier (UPS). Les enseignements qu'il dispense dans les filières de génie civil de l'université (licence – master et 2e et 3e années de l'Upssitech, école interne d'ingénieurs de l'UPS) concernent principalement le calcul des structures, le béton précontraint et la construction mixte acier-béton. Il est chercheur au laboratoire Matériaux et durabilité des constructions (LMDC – UPS-Insa Toulouse) dans lequel il mène des travaux sur le comportement mécanique différé des bétons, retrait et fluage, notamment sur les *bétons fibrés ultra performants* (BFUP).

Manuel de cours correspondant, chez le même éditeur :
Erick Ringot, *Calcul des ouvrages. Résistance des matériaux et fondements du calcul des structures*, 512 p., 2017

En couverture :
Champ de contrainte de cisaillement de torsion de Saint-Venant dans un profil de section droite triangulaire équilatéral
Détail de construction d'ArcelorMittal Orbit. Cette tour métallique de 115 m conçue par le sculpteur Anish Kapoor et l'ingénieur structure Cecil Balmond fut construite à Londres à l'occasion des Jeux olympiques d'été de 2012 (photo © Pierre Engel)
Ossature métallique d'un parking aérien (Londres) en phase de construction (photo © Pierre Engel)
Ossature industrielle en treillis formant poutres (photo © Pierre Engel)
Faîtage et rive de fermes de charpente d'un bâtiment en construction. Détail sur un gousset d'assemblage (photo © Pierre Engel)

PUBLICS
Licence et master de génie civil
Diplôme d'ingénieur civil
Formation continue

60 €
www.editions-eyrolles.com
Groupe Eyrolles | Diffusion Geodif
Code éditeur : G67541
ISBN : 978-2-212-67541-2
9 782212 675412
Couverture : Christophe Picaud • Maquette : studio Eyrolles

Erick Ringot
avec Bernard Husson
et Thierry Vidal

CALCUL DES OUVRAGES : APPLICATIONS

Exercices et problèmes résolus de résistance des matériaux et de calcul des structures

EYROLLES

ÉDITIONS EYROLLES
61, bd Saint-Germain
75240 Paris Cedex 05
www.editions-eyrolles.com

Les schémas et, sauf mention contraire, les photos illustrant l'ouvrage sont des auteurs.

Aux termes du code de la propriété intellectuelle, toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle de la présente publication, faite par quelque procédé que ce soit (reprographie, microfilmage, scannérisation, numérisation...) sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du code de la propriété intellectuelle. L'autorisation d'effectuer des reproductions par reprographie doit être obtenue auprès du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC) – 20, rue des Grands-Augustins – 75006 Paris.

© Groupe Eyrolles, 2018, ISBN : 978-2-212-67541-2

Sommaire

I.	Exercices de mécanique générale	17
II.	Exercices de statique	79
III.	Théorie des poutres	151
IV.	Exercices de cisaillement de flexion	237
V.	Exercices de torsion	309
VI.	Applications directes du principe des puissances virtuelles	379
VII.	Méthode des forces	435
VIII.	Méthode des déplacements	489
IX.	Exercices de stabilité en régime élastique	575
X.	Problèmes de synthèse	651

Ce livre est dédié à Elena Ringot née le 6 novembre 2017
à Toulouse pendant l'écriture de ce recueil d'exercices.

Les auteurs remercient chaleureusement le Professeur Rached El Fatmi de l'ENI de Tunis pour la mise à disposition de la suite logicielle CSB et les échanges instructifs sur la théorie des poutres. Notre collègue Bernard Étienne, ancien élève de l'École normale supérieure Paris-Saclay, professeur agrégé de génie civil et vacataire à l'université de Toulouse, a relu les épreuves de ce livre et en est vivement remercié.

Erick Ringot

Table des matières

1 Exercices de mécanique générale **17**
1.1 L'essentiel 17
1.2 Double produit vectoriel 20
1.2.1. Énoncé, 20 — 1.2.2. Solution, 20
1.3 Théorème de Lagrange 21
1.3.1. Énoncé, 21 — 1.3.2. Solution, 21
1.4 Invariance par permutation circulaire du produit mixte 22
1.4.1. Énoncé, 22 — 1.4.2. Solution, 22
1.5 Division vectorielle 24
1.5.1. Énoncé, 24 — 1.5.2. Solution, 24
1.6 Torseur formé par un ensemble de forces concentrées 25
1.6.1. Énoncé, 25 — 1.6.2. Solution, 26
1.7 Tenseur antisymétrique et produit vectoriel 28
1.7.1. Énoncé, 28 — 1.7.2. Solution, 28
1.8 Conditions pour qu'un torseur forme un glisseur 29
1.8.1. Énoncé, 29 — 1.8.2. Solution, 29
1.9 Forces réparties sur un arc parabolique 30
1.9.1. Énoncé, 30 — 1.9.2. Questions, 30 — 1.9.3. Solution, 31
1.10 Force transversale uniformément répartie sur un arc quelconque 39
1.10.1. Description, 39 — 1.10.2. Questions, 39 — 1.10.3. Solution, 39
1.11 Plaque demi-circulaire soumise à une densité variable de force surfacique 42
1.11.1. Description, 42 — 1.11.2. Questions, 43 — 1.11.3. Solution, 43
1.12 Étude cinématique d'un pendule suspendu à quatre câbles 45
1.12.1. Énoncé, 45 — 1.12.2. Hypothèse, 46 — 1.12.3. Solution, 46
1.13 Série de mécanismes [1] – Détermination du nombre de degrés de liberté 49
1.13.1. Description, 49 — 1.13.2. Question, 49 — 1.13.3. Solution, 49
1.14 Série de mécanismes [2] – Détermination du nombre de degrés de liberté 50
1.14.1. Description, 51 — 1.14.2. Question, 51 — 1.14.3. Solution, 51
1.15 Paramétrage d'une rotation dans un mécanisme à 1 DDL 54
1.15.1. Description, 54 — 1.15.2. Questions, 55 — 1.15.3. Solution, 55
1.16 Mécanisme en portique à cinq articulations 58

1.16.1. Description, 58 — 1.16.2. Questions, 58 — 1.16.3. Solution, 59

1.17 Épure cinématique I 63

1.17.1. Énoncé, 63 — 1.17.2. Questions, 63 — 1.17.3. Solution, 63

1.18 Puissance d'une force répartie agissant sur une poutre indéformable 66

1.18.1. Description, 66 — 1.18.2. Questions, 67 — 1.18.3. Solution, 67

1.19 Puissance développée par un cycliste en ascension 70

1.19.1. Description, 70 — 1.19.2. Question, 70 — 1.19.3. Solution, 71

1.20 Conditions d'équilibre d'un mécanisme à 2 DDL 71

1.20.1. Description, 71 — 1.20.2. Questions, 71 — 1.20.3. Solution, 72 — 1.20.4. Vérification à l'aide de pyBar, 76

2 Exercices de statique **79**

2.1 L'essentiel 79

2.2 Arc funiculaire d'une charge de neige 81

2.2.1. Description, 81 — 2.2.2. Hypothèses, 81 — 2.2.3. Questions, 81 — 2.2.4. Solution, 82 — 2.2.5. Conclusion , 83

2.3 Étude statique d'un bâtiment agricole 83

2.3.1. Description, 84 — 2.3.2. Questions, 84 — 2.3.3. Solution, 84 — 2.3.4. Conclusion, 92

2.4 Statique d'un treillis 93

2.4.1. Description, 93 — 2.4.2. Questions, 93 — 2.4.3. Solution, 94 — 2.4.4. Solution pyBar, 97

2.5 Statique d'un portique à traverse droite 98

2.5.1. Description, 99 — 2.5.2. Questions, 99 — 2.5.3. Solution, 100 — 2.5.4. Vérification pyBar, 107

2.6 Statique d'un portique à traverse brisée 108

2.6.1. Description, 108 — 2.6.2. Questions, 109 — 2.6.3. Solution, 109 — 2.6.4. Vérification pyBar, 121

2.7 Abricycle 122

2.7.1. Description, 122 — 2.7.2. Questions, 122 — 2.7.3. Solution, 123

2.8 Relations entre moments fléchissants dans une structure hyperstatique 129

2.8.1. Description, 129 — 2.8.2. Questions, 129 — 2.8.3. Solution, 129 — 2.8.4. Bilan, 134 — 2.8.5. Vérification à l'aide de pyBar, 135

2.9 Étude d'une structure isostatique en « shed » 135

2.9.1. Description, 136 — 2.9.2. Questions, 137 — 2.9.3. Solution, 137 — 2.9.4. Vérification à l'aide de pyBar, 143

2.10 Cas limite mécanisme-structure 144

2.10.1. Description, 144 — 2.10.2. Question, 144 — 2.10.3. Solution, 145 — 2.10.4. Conclusion, 148

3 Théorie des poutres **151**

3.1 L'essentiel 151

3.2 Étude d'un profil en T 152

3.2.1. Description, 152 — 3.2.2. Questions, 152 — 3.2.3. Solution, 153

3.3 Section elliptique 155

3.3.1. Description, 155 — 3.3.2. Questions, 155 — 3.3.3. Solution, 156 — 3.3.4. Solution CSection, 159

3.4 Section droite délimitée par une enveloppe parabolique 160

3.4.1. Description, 160 — 3.4.2. Questions, 160 — 3.4.3. Solution, 161 — 3.4.4. Solution CSection, 164

3.5 Section en quart de rond 165

3.5.1. Description, 165 — 3.5.2. Questions, 166 — 3.5.3. Solution, 166 — 3.5.4. Solution CSection, 172

3.6 Modèle simplifié de cornière épaisse 172

3.6.1. Description, 173 — 3.6.2. Questions, 173 — 3.6.3. Solution, 174 — 3.6.4. Solution CSection, 179

3.7 Section mixte acier-béton 180

3.7.1. Description, 180 — 3.7.2. Question, 181 — 3.7.3. Solution, 1823.7.3.1. Aires partielles et aire homogénéisée, 182 — 3.7.3.2. Moments statiques et centres d'inertie, 182 — 3.7.3.3. Inerties quadratiques, 184 — 3.7.4. Calcul à l'aide d'un tableur, 185 — 3.7.5. Solution CSection, 186

3.8 Console courte en quart de rond 188

3.8.1. Description, 188 — 3.8.2. Questions, 189 — 3.8.3. Solution, 189 — 3.8.4. Solution CBeam, 196 — 3.8.5. Conclusion de l'exercice, 197

3.9 Profil épais en forme de Z 198

3.9.1. Description, 198 — 3.9.2. Questions, 198 — 3.9.3. Solution, 199 — 3.9.4. Solution CSection, 201

3.10 Poutre sur deux appuis à profil en forme de Z 202

3.10.1. Description, 202 — 3.10.2. Questions, 203 — 3.10.3. Solution, 2033.10.3.1. Hyperstaticité et équilibre global, 203 — 3.10.3.2. Sollicitations, 204 — 3.10.3.3. Déformations et déplacements, 207 — 3.10.3.4. Contraintes normales dans la section médiane, 211 — 3.10.4. Solution CBeam, 212 3.10.4.1. Sollicitations et déplacements, 213 — 3.10.4.2. Contraintes de cisaillement dans le plan d'encastrement, 213

3.11 Poutre infiniment longue posée sur un sol élastique 215

3.11.1. Description, 215 — 3.11.2. Hypothèses, 216 — 3.11.3. Questions, 216 — 3.11.4. Solution, 216

3.12 Contribution du cisaillement à la ligne déformée d'une console 225

3.12.1. Description, 225 — 3.12.2. Questions, 226 — 3.12.3. Solution, 226 — 3.12.4. Solution CSB, 234 — 3.12.5. Conclusion, 235

4 Exercices de cisaillement de flexion 237

4.1 L'essentiel 237

4.1.1. Profils minces ouverts, 237 — 4.1.2. Profils minces fermés, 237 — 4.1.3. Sections réduites, 238 — 4.1.4. Centre de raideur, 238

4.2 Cornière à ailes égales 239

4.2.1. Description, 239 — 4.2.2. Questions, 240 — 4.2.3. Solution, 2404.2.3.1. Position du centre de gravité G par rapport au centre de flexion C, 240 — 4.2.3.2. Moment de torsion M_x, 241 — 4.2.3.3. Moments principaux d'inertie I_y et I_z, 241 — 4.2.3.4. Flux de cisaillement de

flexion entraîné par l'effort de cisaillement, 242 — 4.2.4. Résultats avec CSection, 244

4.3 Profil en « V » 245

4.3.1. Description, 245 — 4.3.2. Questions, 245 — 4.3.3. Solution, 245 — 4.3.4. Solution CSection, 251

4.4 Panne Z 252

4.4.1. Description, 252 — 4.4.2. Questions, 252 — 4.4.3. Solution, 252 — 4.4.4. Solution CSection, 257

4.5 Profil en oméga 259

4.5.1. Description, 259 — 4.5.2. Questions, 259 — 4.5.3. Solution, 259 — 4.5.4. Solution CSection, 266

4.6 Anneau circulaire cloisonné 266

4.6.1. Description, 267 — 4.6.2. Questions, 267 — 4.6.3. Solution, 267 — 4.6.4. Solution CSection, 277

4.7 Profil mince 4-connexe à double symétrie 278

4.7.1. Description, 278 — 4.7.2. Questions, 279 — 4.7.3. Solution, 279 — 4.7.4. Solution CSection, 288

4.8 Profil mince fermé 3-connexe 289

4.8.1. Description, 290 — 4.8.2. Questions, 290 — 4.8.3. Solution, 290 — 4.8.4. Solution CSection, 298

4.9 Profil 5-connexe à plan de symétrie 299

4.9.1. Description, 299 — 4.9.2. Questions, 300 — 4.9.3. Solution, 300 — 4.9.4. Solution CSection, 306

5 Exercices de torsion **309**

5.1 L'essentiel 309

5.1.1. Equation de la torsion, 309 — 5.1.2. Cas des profils minces, 310

5.2 Profilé IPE120 laminé à chaud 311

5.2.1. Description, 311 — 5.2.2. Questions, 313 — 5.2.3. Solution, 313 — 5.2.4. Solution CSection, 314

5.3 Profil en aluminium extrudé 316

5.3.1. Description, 316 — 5.3.2. Questions, 316 — 5.3.3. Solution, 317 — 5.3.4. Solution CSection, 318

5.4 Tube serrurier « Z » à ailettes 321

5.4.1. Description, 321 — 5.4.2. Questions, 322 — 5.4.3. Solution, 323 — 5.4.4. Solution CSection, 324

5.5 Torsion d'un anneau circulaire cloisonné 326

5.5.1. Description, 327 — 5.5.2. Questions, 327 — 5.5.3. Solution, 327 — 5.5.4. Vérification CSection, 329 — 5.5.5. Généralisation, 3295.5.5.1. Cas où le rayonnage est régulier, 329 — 5.5.5.2. Cas d'un rayonnage quelconque, 330 — 5.5.6. Conclusion, 332

5.6 Anneau circulaire à cloisons parallèles 333

5.6.1. Description, 333 — 5.6.2. Questions, 333 — 5.6.3. Solution, 333 — 5.6.4. Solution CSection, 336 — 5.6.5. Conclusion, 338

5.7 Étude d'un voussoir de pont 338

5.7.1. Description, 338 — 5.7.2. Questions, 339 — 5.7.3. Solution, 339 — 5.7.4. Solution

CSection, 343

5.8 Torsion d'une poutre de section elliptique 346

5.8.1. Description, 347 — 5.8.2. Questions, 347 — 5.8.3. Solution, 348 — 5.8.4. Solution CSection, 360

5.9 Torsion d'une poutre de section triangulaire équilatérale 361

5.9.1. Description, 361 — 5.9.2. Questions, 361 — 5.9.3. Solution, 362 — 5.9.4. Solution CSection, 367

5.10 Torsion d'une colonne circulaire avec lunule 368

5.10.1. Description, 369 — 5.10.2. Questions, 369 — 5.10.3. Solution, 370 — 5.10.4. Solution CSection, 377

6 Applications directes du principe des puissances virtuelles 379

6.1 L'essentiel 379

6.1.1. Principe des puissances virtuelles, 379 — 6.1.2. Intégrales de Mohr, 380

6.2 Potence soumise à des efforts concentrés 380

6.2.1. Description, 380 — 6.2.2. Question, 381 — 6.2.3. Solution, 381 — 6.2.4. Solution pyBar, 385

6.3 Déformation d'un arc circulaire surbaissé 385

6.3.1. Description, 385 — 6.3.2. Questions, 386 — 6.3.3. Solution, 386 — 6.3.4. Solution pyBar, 394

6.4 Déformation thermique d'une ossature isostatique 395

6.4.1. Description, 395 — 6.4.2. Questions, 396 — 6.4.3. Solution, 396 — 6.4.4. Modélisation pyBar, 406 — 6.4.5. À retenir, 407

6.5 Ligne d'influence d'un effort normal dans un treillis 407

6.5.1. Description, 407 — 6.5.2. Questions, 408 — 6.5.3. Solution, 408

6.6 Ligne d'influence d'un moment dans un portique 410

6.6.1. Description, 410 — 6.6.2. Questions, 410 — 6.6.3. Solution, 411

6.7 Ligne d'influence d'une réaction dans une poutre continue 414

6.7.1. Description, 415 — 6.7.2. Question, 415 — 6.7.3. Solution, 415 — 6.7.4. Solution pyBar, 417

6.8 Ligne d'influence du moment sur appui dans une poutre continue 418

6.8.1. Description, 418 — 6.8.2. Question, 418 — 6.8.3. Solution, 418 — 6.8.4. Conclusion, 421

6.9 Ligne d'influence de la rotation sur appui dans une poutre continue 421

6.9.1. Description, 421 — 6.9.2. Questions, 421 — 6.9.3. Solution, 422

6.10 Portique à traverse brisée soumise à une charge de neige 424

6.10.1. Description, 424 — 6.10.2. Questions, 424 — 6.10.3. Solution, 425 — 6.10.4. Solution pyBar, 432 — 6.10.5. Note générale quant au moment produit par la neige, 433

7 Méthode des forces 435

7.1 L'essentiel 435

7.2 Portique asymétrique hyperstatique d'ordre 1 437

7.2.1. Description, 437 — 7.2.2. Questions, 437 — 7.2.3. Solution, 438 — 7.2.4. Modélisation pyBar, 441

7.3 Structure industrielle soumise à force concentrée 441
7.3.1. Description, 442 — 7.3.2. Questions, 442 — 7.3.3. Solution, 443
7.4 Pont suspendu à un arc circulaire 451
7.4.1. Description, 452 — 7.4.2. Questions, 453 — 7.4.3. Solution, 453 — 7.4.4. Modélisation pyBar, 462 — 7.4.5. Code C pour le calcul des intégrales de Mohr, 462
7.5 Poutre sur trois appuis : choix de l'inconnue hyperstatique 464
7.5.1. Description, 464 — 7.5.2. Hypothèses, 464 — 7.5.3. Questions, 465 — 7.5.4. Solution, 465 — 7.5.5. Solution pyBar, 470 — 7.5.6. Conclusion, 470
7.6 Pont hyperstatique de degré 2 471
7.6.1. Description, 471 — 7.6.2. Hypothèses, 471 — 7.6.3. Questions, 471 — 7.6.4. Solution, 472
7.7 Portique à jambages obliques 480
7.7.1. Description, 481 — 7.7.2. Hypothèses, 481 — 7.7.3. Questions, 481 — 7.7.4. Solution, 482 — 7.7.5. Solution pyBar, 487

8 Méthode des déplacements 489
8.1 L'essentiel 489
8.2 Détermination des degrés de liberté I 489
8.2.1. Description, 490 — 8.2.2. Questions, 490 — 8.2.3. Solution, 490
8.3 Degrés de liberté II 491
8.3.1. Description, 491 — 8.3.2. Questions, 491 — 8.3.3. Solution, 491
8.4 Degrés de liberté III 492
8.4.1. Description, 492 — 8.4.2. Questions, 493 — 8.4.3. Solution, 493
8.5 Gestion des condensations statiques I 495
8.5.1. Description, 495 — 8.5.2. Question, 495 — 8.5.3. Solution, 495
8.6 Condensation statique II 497
8.6.1. Description, 497 — 8.6.2. Question, 498 — 8.6.3. Solution, 498
8.7 Structure en T à nœuds indéplaçables 500
8.7.1. Description, 500 — 8.7.2. Question, 501 — 8.7.3. Solution, 501
8.8 Poutre continue posée sur cinq appuis 503
8.8.1. Description, 504 — 8.8.2. Question, 504 — 8.8.3. Solution, 504
8.9 Structure en V 509
8.9.1. Description, 509 — 8.9.2. Questions, 510 — 8.9.3. Solution, 510 — 8.9.4. Vérification par la statique et application du **PPV*** , 515
8.10 Treillis isostatique 517
8.10.1. Description, 517 — 8.10.2. Questions, 517 — 8.10.3. Solution, 518
8.11 Abri en demi-portique 526
8.11.1. Description, 526 — 8.11.2. Questions, 526 — 8.11.3. Solution, 527 — 8.11.4. Vérification par la statique et application du **PPV***, 532
8.12 Portique à diagonale élastique 533
8.12.1. Description, 533 — 8.12.2. Questions, 533 — 8.12.3. Solution, 534
8.13 Treillis hyperstatique sous chargement thermique 540

8.13.1. Description, 540 — 8.13.2. Questions, 540 — 8.13.3. Solution, 540
8.14 Portique à liaison interne élastique 550
8.14.1. Description, 550 — 8.14.2. Questions, 550 — 8.14.3. Solution, 551 — 8.14.4. Structure en T à nœuds déplaçables et à appui élastique, 558 — 8.14.5. Description, 558 — 8.14.6. Question, 558 — 8.14.7. Solution, 558
8.15 Structure à rotation imposée 563
8.15.1. Description, 563 — 8.15.2. Questions, 563 — 8.15.3. Solution, 563
8.16 Poutre continue comportant un appui élastique et un appui dénivelé 567
8.16.1. Description, 568 — 8.16.2. Questions, 568 — 8.16.3. Solution, 568

9 Stabilité en régime élastique 575
9.1 L'essentiel 575
9.2 Stabilité d'un mécanisme I 576
9.2.1. Description, 576 — 9.2.2. Questions, 577 — 9.2.3. Solution, 577
9.3 Stabilité d'un mécanisme II, effet de la linéarisation 580
9.3.1. Description, 580 — 9.3.2. Questions, 580 — 9.3.3. Solution, 580
9.4 Effet d'un défaut géométrique sur la stabilité d'un mécanisme 584
9.4.1. Description, 584 — 9.4.2. Questions, 584 — 9.4.3. Solution, 584
9.5 Effet d'amplification de la déformée d'une charge compressive 587
9.5.1. Description, 587 — 9.5.2. Questions, 587 — 9.5.3. Solution, 588
9.6 Méthode de Rayleigh-Timoshenko : influence du motif de déplacement 591
9.6.1. Description, 591 — 9.6.2. Questions, 591 — 9.6.3. Solution, 592
9.7 Étude du flambement d'une poutre modélisée en 1 ou 2 éléments 595
9.7.1. Description, 596 — 9.7.2. Question, 596 — 9.7.3. Solution, 596
9.8 Stabilité d'un triple portique I 600
9.8.1. Description, 600 — 9.8.2. Questions, 600 — 9.8.3. Solution, 600
9.9 Stabilité d'un triple portique II 606
9.9.1. Description, 606 — 9.9.2. Question, 607 — 9.9.3. Solution, 607
9.10 Stabilité d'un module de structure en T 611
9.10.1. Description, 611 — 9.10.2. Question, 612 — 9.10.3. Solution, 612
9.11 Stabilité d'un demi-portique à jambage 617
9.11.1. Description, 617 — 9.11.2. Questions, 617 — 9.11.3. Solution, 618
9.12 Flambement d'une poutre avec appui élastique 622
9.12.1. Description, 623 — 9.12.2. Questions, 623 — 9.12.3. Solution, 623
9.13 Flambement d'une poutre continue sur trois appuis 628
9.13.1. Description, 628 — 9.13.2. Questions, 629 — 9.13.3. Solution, 629
9.14 Matrice de rigidité de Rayleigh-Ritz 634
9.14.1. Description, 634 — 9.14.2. Questions, 634 — 9.14.3. Solution, 634
9.15 Application de la matrice de rigidité de Rayleigh-Ritz 640
9.15.1. Description, 640 — 9.15.2. Questions, 640 — 9.15.3. Solution, 641
9.16 Étude de stabilité d'un portique symétrique 645

9.16.1. Description, 645 — 9.16.2. Questions, 645 — 9.16.3. Solution, 646

10 Problèmes de synthèse **651**

10.1 Introduction 651

10.2 Grande roue 651

10.2.1. Description, 651 — 10.2.2. Hypothèses, 651 — 10.2.3. Questions, 652 — 10.2.4. Solution, 652 — 10.2.5. Vérification pyBar, 655

10.3 Étude des contraintes dans un profil en oméga 656

10.3.1. Description, 656 — 10.3.2. Questions, 657 — 10.3.3. Solution, 658

10.4 Étude d'un portique à nœuds indéplaçables 665

10.4.1. Description, 665 — 10.4.2. Questions, 665 — 10.4.3. Solution, 667

10.5 Hangar, choix du modèle de calcul 674

10.5.1. Description, 675 — 10.5.2. Question, 675 — 10.5.3. Solution, 675

10.6 Pont hyperstatique soumis à la composante verticale d'un séisme 679

10.6.1. Description, 680 — 10.6.2. Questions, 681 — 10.6.3. Solution, 682 — 10.6.4. Solution CSB, 691 — 10.6.5. Correction du modèle, 693 — 10.6.6. Contraintes normales (section médiane), 696 — 10.6.7. Un mot sur les contraintes de cisaillement, 698 — 10.6.8. Conclusion de l'exercice, 698

10.7 Flexion-torsion d'un profil en U 699

10.7.1. Description, 699 — 10.7.2. Questions, 699 — 10.7.3. Solution, 700 — 10.7.4. Solution CSection, 709

10.8 Courbe de capacité d'une structure hyperstatique 711

10.8.1. Description, 711 — 10.8.2. Questions, 712 — 10.8.3. Solution, 713

10.9 Contreventement d'un portique 724

10.9.1. Description, 724 — 10.9.2. Questions, 725 — 10.9.3. Solution, 72610.9.3.1. Portique sans diagonale traité par la méthode des forces, 726 — 10.9.3.2. Portique avec diagonale traité par la méthode des déplacements, 731 — 10.9.4. Solution pyBar, 738

10.10 Ossature de plancher 740

10.10.1. Description, 740 — 10.10.2. Hypothèses, 740 — 10.10.3. Questions, 740 — 10.10.4. Solution, 741

10.11 Efforts de renversement sous action sismique 746

10.11.1. Description, 746 — 10.11.2. Hypothèses, 746 — 10.11.3. Questions, 747 — 10.11.4. Solution, 747 — 10.11.5. Conclusion, 751

10.12 Torsion sous action sismique 752

10.12.1. Description, 752 — 10.12.2. Hypothèses, 752 — 10.12.3. Questions, 753 — 10.12.4. Solution, 753 — 10.12.5. Conclusion, 759

Avant-propos

Ce recueil d'exercices vient en complément du livre *Calcul des ouvrages - résistance des matériaux et calcul des structures* [1] dont il illustre chaque chapitre. Les exercices se veulent être originaux, graduels dans leur difficulté et abondamment commentés, l'objectif étant de favoriser l'acquisition puis la maîtrise des concepts par le lecteur. Quelques rappels de mathématiques, lorsque cela a été jugé nécessaire par les auteurs, émaillent le discours ça et là. Les erreurs fréquentes et autres pièges ont été signalés et déjoués.

Ce recueil aborde les sujets suivants :

1. la mécanique générale utile à l'analyse de structures : torseurs et cinématique ;
2. la statique des structures sous l'hypothèse des petites perturbations par approche vectorielle et l'approche scalaire ;
3. la théorie des poutres ;
4. le cisaillement de flexion ;
5. le cisaillement de torsion de Saint-Venant ;
6. le principe des puissances virtuelles ;
7. la méthode des forces ;
8. la méthode des déplacements ;
9. la stabilité des structures élastiques ;
10. les problèmes de synthèse aux thématiques mixtes.

Chaque chapitre est introduit par un résumé de cours rappelant les notions essentielles utiles à la résolution des exercices qui suivent.

Logiciels

Dans les exercices qui suivent, il sera fait mention de l'utilisation de logiciels utilisés à des fins de contrôle, d'enrichissement et d'illustration des solutions analytiques. Il s'agit de :

1. Erick Ringot, *Calcul des ouvrages : résistance des matériaux et fondements du calcul des structures*, 512 pages, Eyrolles, 2017 (ISBN 978-2-212-67370-8), également disponible au format numérique.

logiciel	statut	description	site
pyBar	freeware	logiciel de calcul de structure simple et pédagogique développé par Philippe Lawrence, ingénieur INSA et agrégé de génie civil. L'utilisation de ce programme est présentée dans le livre de cours cité plus haut (section).	http://pybar.fr/
CSB	commercial	voir la section ci-après.	http://www.nt4e.com/
Gmsh	open source	« mailleur » Open source utilisé pour la modélisation des sections calculées par le module CSection de CSB.	http://Gmsh.info/ gmsh

Nous aurons également recours à un tableur électronique pour résoudre des systèmes linéaires, tracer des champs de sollicitations ou de contraintes, rechercher des valeurs propres. De façon exceptionnelle, un peu de code en langage C sera proposé pour le calcul d'intégrales de Mohr sur des arcs (exercice 7.4).

Introduction à CSB

Présentation

Le logiciel CSB (Cross Section & Beam analysis) est une suite logicielle permettant le calcul des poutres de section homogène ou hétérogène (composite). Conçu et développé par le Professeur Rached El Fatmi de l'École Nationale des Ingénieurs de Tunis, CSB s'adresse à l'ingénieur ; il constitue un tandem de deux outils numériques complémentaires : CSection et CBeam qui, pour un problème de poutre donné, s'articule comme suit :

- CSection calcule les caractéristiques de la section droite, compte tenu de sa forme et du (des) matériau(x) qui la compose(nt) ;
- CBeam utilise ces caractéristiques de section pour assurer le calcul de la poutre :
  - en statique : sous chargement mécanique ou thermique, pour fournir les sollicitations, la déformée, ...etc ;
  - en dynamique : calcul des premières fréquences et des modes associés ;
  - en stabilité : calcul du facteur d'amplification critique et caractérisation du mode de bifurcation associé.

Les poutres traitées par CSB sont supposées droites et de section uniforme. Cependant la section peut être de forme et de constitution quelconque en termes de géométrie et de matériau(x). La forme peut ainsi être pleine ou cloisonnée, mince ou épaisse, ouverte ou fermée, symétrique ou non. Quant aux matériaux, de nature isotrope ou anisotrope, ils peuvent être librement agencés dans la section.

Pour les besoin des applications de ce livre, le module CSection sera utilisé de façon limitée aux sections isotropes.

CSection permet le calcul exact des caractéristiques de section ; on entend par « exact » le fait que ce programme met en œuvre la théorie de poutre de Saint-Venant (TPSV) qui constitue la référence absolue en tant que théorie de poutre se référant aux six efforts intérieurs classiques (un effort normal, deux efforts tranchants, deux moments de flexion et un moment de torsion) tels que classiquement enseignés dans les écoles d'ingénieurs (selon Bernoulli ou Timoshenko) . Le caractère « exact » vient de ce que la TPSV s'affranchit des hypothèses classiques des poutres telles que le mouvement rigide des sections ou l'hypothèse des sections minces pour déterminer précisément les distributions de cisaillement. Pour la TPSV, toutes les sections sont traitées de la même manière et elles sont libres de se déformer dans leur plan (effets Poisson) et hors de leur plan (gauchissement). Selon l'approche « ingénieur » de la théorie des poutres, CSection établit la relation linéaire entre les 6 efforts intérieurs $[S]$ et les déformations associées $[\varepsilon] : [S] = [[K]].[\varepsilon]$. De cette relation, CSection déduit les caractéristiques de section utiles à l'ingénieur.

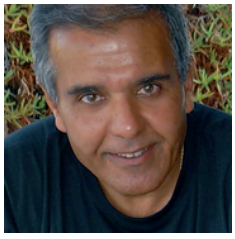
Au delà de ces caractéristiques de section, CSection permet aussi d'obtenir, pour toute combinaison des 6 efforts intérieurs, le champ des contraintes normales et de cisaillement dans la section. Enfin, même si cela ne constitue pas un résultat nécessaire à l'ingénieur, CSection fournit aussi les effets Poisson et les gauchissements de section que chacun des 6 efforts intérieurs engendre. Rappelons en effet que les calculs menés par CSection ne présupposent pas l'indéformabilité du plan de section droite contrairement aux hypothèses admises dans les théories communes.

Les calculs de CSection sont réalisés par application de la méthode des éléments finis sur la section ce qui nécessite de définir sa géométrie et de la mailler en éléments triangulaires. Cette étape est assurée par le générateur de maillage Gmsh (open source).

Aujourd'hui CSB trouve ses applications industrielles dans divers secteurs tels que l'automobile, l'aéronautique, le génie civil, l'énergie renouvelable.

Bibliographie résumée de Rached El Fatmi sur la théorie des poutres composites

- *Thermo-mechanical analysis of composite beams*, 2017, M. Lahmar, F. Naccache, R. E.L. Fatmi.
- « A refined 1D beam theory built on 3D Saint-Venant's solution to compute homogeneous and composite beams », 2016, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, R. El Fatmi.
- « A novel tool for composite beam computations », 2013, *JEC Composites Magazine*, R. El Fatmi.



Prof. El Fatmi

Pour une description exhaustive de CSB se référer au site Internet http://www.nt4e.com/.

Utilisation résumée de CSection

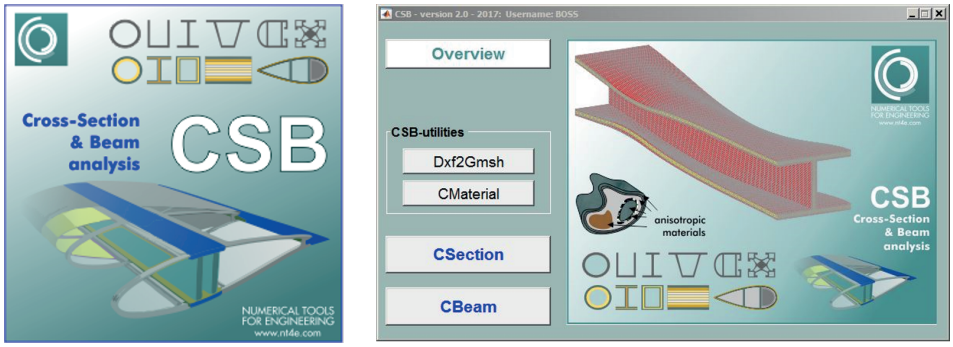


FIGURE 1. *Menu principal de CSB avec ces trois modules CMaterial, CSection et CBeam. Dans le cadre de ce livre, le module CSection est utilisé en prenant des sections homogènes et un matériau isotrope homogène. Plusieurs exercices du chapitre « théorie des poutres » illustreront le module CBeam.*

Fonctionnalités

Selon l'approche « ingénieur » de la théorie des poutres, CSection établit la relation linéaire entre les 6 contraintes généralisées [2] et les déformations associées :

$$[S] = [[K]] \cdot [\varepsilon]$$

La matrice de comportement $[[K]]$ est exprimée dans le système d'axes naturel de l'utilisateur qui peut différer du système d'axes principaux. C'est une des raisons pour lesquelles la matrice 6×6 est « complète » (non-diagonale).

Une des fonctions de CSection est ainsi la détermination de la matrice de comportement qui peut ensuite être traduite en termes de caractéristiques :

- aire de section droite,
- inerties quadratiques,
- sections réduites,
- inertie de torsion.

CSection permet aussi la localisation des points singuliers de la section :

- centre d'inertie,
- centre de torsion,
- orientation des axes d'inertie.

Les contraintes généralisées étant données, CSection peut également établir :

- le champ des contraintes normales et de cisaillement,
- les variations dimensionnelles dues à l'effet Poisson,
- les effets de gauchissement.

2. On parle de « sollicitations » lorsque les contraintes généralisées sont projetées dans le système d'axes principal d'inertie.

Étapes de calcul

1. Définir la géométrie d'une section. Pour cela, on utilise le mailleur externe Gmsh [3]. Il suffit d'écrire un script de description, de l'enregistrer (fichier d'extension .geo) puis de générer le maillage (fichier d'extension .msh) formé d'éléments triangulaires ;
2. Définir un matériau grâce au module CMaterial à moins que celui-ci ne figure déjà au catalogue fourni avec le logiciel ;
3. Importer le maillage dans CSection par la commande « Import mesh » du menu CSFile et définir un bloc composé d'un seul sous-domaine pour une section homogène ;
4. Sélectionner le matériau de son choix dans la bibliothèque par la commande « open materials data » puis « select material » et l'associer au sous-domaine [4] ;
5. CSB offre la possibilité de définir des « charges de distorsion » pour observer l'influence de la modalité d'application des forces exercées sur les profils minces. Nous n'emploierons pas cette option ici ;
6. Enregistrer les données ainsi créées par la commande « Save » du menu CSFile ;
7. Finalement « résoudre » la section par un simple clic de sorte à obtenir toutes les caractéristiques mécaniques de la section.

Adaptation des conventions et notations

CSB est basé sur la convention nord-américaine pour la désignation des axes de la poutres (figure 2). Ainsi :

convention de ce livre	convention CSB
$\overrightarrow{x}$	$+\overrightarrow{z}$
$\overrightarrow{y}$	$+\overrightarrow{y}$
$\overrightarrow{z}$	$-\overrightarrow{x}$

CBeam

À partir d'une section droite générée par Gmsh et caractérisée par CSection, CBeam permet la génération d'une poutre droite par extrusion (figure 3). On peut ensuite charger la poutre de façon ponctuelle, linéique et/ou surfacique en précisant les régions du contour qui sont exposées aux efforts. Naturellement, les conditions d'appui sont totalement paramétrables.

CBeam permet les calculs de la poutre (sollicitations, déplacements, déformations et contraintes) selon deux modèles :

3. Gmsh est un logiciel Open Source sous licence GPL utilisé pour le maillage bi ou tridimensionnel de problèmes de physique préalablement à leur traitement par la méthode des éléments finis – voir le site http://Gmsh.info/.

4. Pour les besoins académiques de cet ouvrage, nous avons créé un matériau de module de Young unitaire $E = 1$, de coefficient de Poisson nul et, donc, de module de cisaillement $G = 0.5$. Ce matériau est systématiquement utilisé dans les illustrations CSection des chapitres 4 et 5.

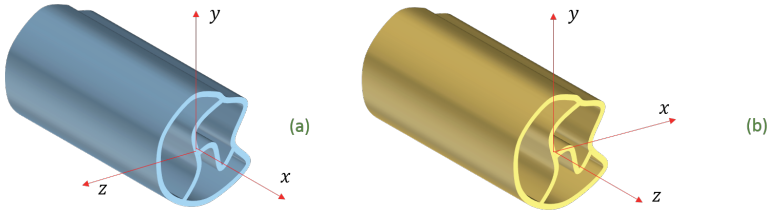


FIGURE 2. *Système d'axes : (a) celui de ce livre d'exercices et (b) celui utilisé par le logiciel CSB.*

1. SVBT : modèle de Saint-Venant natif ;
2. RBT : modèle « Refined Beam Theory ». Ce dernier élargit le champ des possibles et des résultats grâce à la prise en compte de modes cinématiques riches dépendants de la forme de la section. On peut ainsi bloquer les déformations transversales dues à l'effet de Poisson et même bloquer les gauchissements. Le champ de contraintes au niveau des appuis est donc beaucoup plus réaliste. Qui plus est, on récupère également les composantes de contraintes hors plan de section droite $\sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}$ que gomme la théorie native.

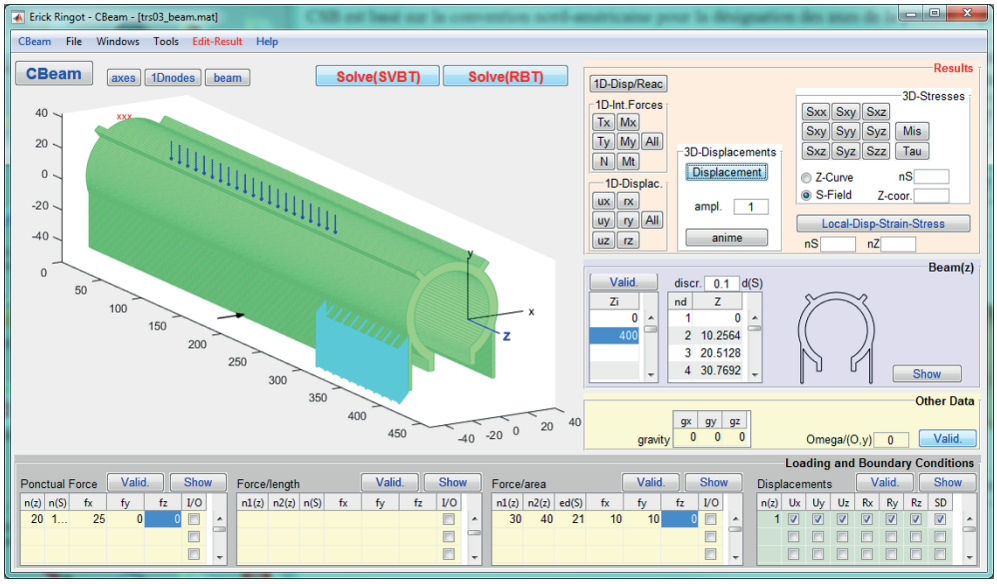


FIGURE 3. *Page de saisie du module CBeam illustrant la possibilité de charger la surface d'une poutre par des forces ponctuelles, linéiques ou surfaciques.*

Chapitre 1

Exercices de mécanique générale

1.1 L'essentiel

Torseurs Un torseur $\{\mathscr{T}\}$ est formé d'une paire de champs vectoriels $\left\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{m}\right\}_P$ tels que :

1. Le champ $\overrightarrow{r}$ est uniforme sur l'espace affine (il est indépendant du point $P \in \mathbb{R}^3$) ; $\overrightarrow{r}$ est appelé « résultante » du torseur $\{\mathscr{T}\}$.
2. Le champ $\overrightarrow{m}$ vérifie la propriété de transport du moment : $\forall P, Q \in \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{m}(Q) = \overrightarrow{m}(P) + \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{r}$; $\overrightarrow{m}(P)$ est appelé « moment » du torseur $\{\mathscr{T}\}$ au point P. Le moment en P est aussi plus simplement noté $\overrightarrow{m}_P$:

– la résultante $\overrightarrow{r}$ constitue un « invariant » du torseur $\{\mathscr{T}\}$: elle ne dépend pas du point du plan affine où elle est évaluée ;
– la résultante $\overrightarrow{r}$ et le moment $\overrightarrow{m}_P$ sont appelés « éléments de réduction » du torseur $\{\mathscr{T}\}$ au point P :

$$\{\mathscr{T}\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{m}_P \end{array} \right\}_P$$

En mécanique, il est fait usage de différents torseurs parmi lesquels : le torseur cinématique caractérisant le champ de vitesse dans un solide indéformable, le torseur des forces, le torseur cinétique, le torseur dynamique.

Équiprojectivité La projection du moment $\overrightarrow{m}_P$ sur la droite $\left(\Gamma_{PQ}\right)$ passant par P et Q est égale à la projection du moment $\overrightarrow{m}_Q$ sur la même droite. C'est le théorème d'équiprojectivité du champ de moment d'un torseur :

$$\overrightarrow{m}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{m}_Q \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Inversement, tout champ de vecteur équiprojectif est le champ de moment d'un torseur.

Axe central et moment central L'axe central d'un torseur est la droite (Δ) de $\mathbb{R}^3$ où le moment $\overrightarrow{m}_P$ est colinéaire à $\overrightarrow{r}$. $(\Delta) = \left\{P \in \mathbb{R}^3 \,/\, \overrightarrow{m}_p = \lambda \overrightarrow{r}\right\}$. L'axe central est orienté par le vecteur résultante (si $\overrightarrow{r} \neq \overrightarrow{0}$). Le facteur λ est uniforme le long de l'axe central ; il est appelé « pas du torseur ». Si on pose $\mathscr{A} = \overrightarrow{m_P} \cdot \overrightarrow{r}$ l'automoment – invariant – du torseur, alors on montre que :

$$\lambda = \frac{\mathscr{A}}{r^2}$$

Torseurs particuliers

- Un couple est un torseur de résultante nulle.
- Un glisseur est un torseur de moment central nul.

Action-réaction Que ce soit en statique comme en dynamique, le torseur des forces de contact qu'exerce un solide (S_1) sur un solide (S_2) est opposé au torseur des forces de contact qu'exerce le solide (S_2) sur le solide (S_1).

$$\{\mathscr{T}_{2\to 1}\} = -\{\mathscr{T}_{1\to 2}\}$$

Torseur cinématique - épure cinématique Le champ de vitesse instantané d'un solide indéformable (S) dans un repère $\{R_0\}$ constitue le champ de moment d'un torseur appelé **torseur cinématique** $\{\mathscr{C}\}$ ayant le vecteur vitesse de rotation pour résultante. Les éléments de réduction du torseur cinématique en un point A :

$$\{\mathscr{C}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \text{résultante} = \text{vecteur vitesse de rotation} = \overrightarrow{\Omega} \\ \text{moment} = \text{vecteur vitesse instantanée} = \overrightarrow{V}_A \end{array} \right\}_A$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), on admet que le champ des petits déplacements d'un solide indéformable à partir d'une position instantanée donnée constitue également un torseur cinématique appelé torseur cinématique des petits déplacements.

Dans le cas des mouvements plans des solides indéformables, on introduit la construction graphique dite « transformation cinématique » suivante :

1. Partant du plan de situation $\mathbb{R}^2$ d'axes x (axe « horizontal ») et y (axe « vertical ») dans lequel s'inscrit le mécanisme et les solides qui le composent.
2. On définit le plan cinématique $\mathbb{P}$ d'axes u (vitesse « horizontale » // à x) et v (vitesse « verticale » // à y) dans lequel s'inscrivent les points images de $\mathbb{R}^2$ par la transformation cinématique décrite au point suivant. Le centre o du repère cinématique constitue l'image de l'ensemble des points de vitesse nulle.
3. La transformation cinématique $\mathscr{C}$ est une transformation de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{P}$ qui, à tout point $P(x,y)$ de l'espace réel $\mathbb{R}^2$, associe le point p du plan cinématique tel que $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{V}_P$:
$$\mathscr{C} : P \in \mathbb{R}^2 \longmapsto p \in \mathbb{P} \,|\, \overrightarrow{op} = \overrightarrow{V}_P$$
4. Pour tout couple de points A et B appartenant au même solide indéformable, la propriété mécanique d'équiprojectivité du torseur cinématique se traduit par une propriété géométrique dans le plan cinématique :
$$\overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ab} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{ab}$$

Cette transformation permet la construction de l'épure cinématique d'un solide, mais plus souvent d'un ensemble de solides formant un mécanisme.

Il est souvent utile de procéder à la détermination de la vitesse de rotation d'un solide partant de la vitesse de deux points. La relation entre les vitesses de deux points du même solide plan est :

$$\overrightarrow{V}_B - \overrightarrow{V}_A = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \text{où} \qquad \overrightarrow{\Omega} = \dot{\omega}\,\overrightarrow{z}$$

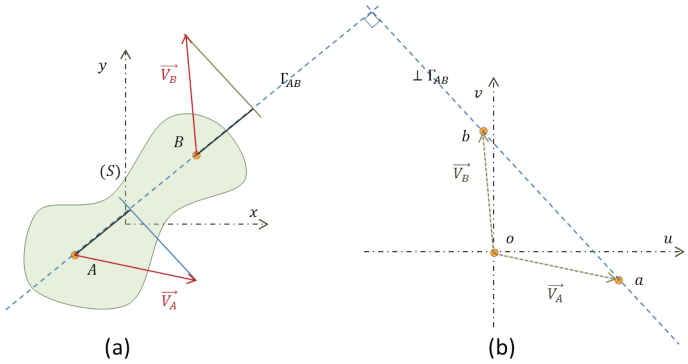


FIGURE 1.1. *(a) Plan réel dit « de situation » et (b) plan cinématique. L'image d'un point P du solide (S) est le point p tel que* $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{V_P}$. *L'équiprojectivité du champ de vitesse entre les points A et B se traduit par l'orthogonalité des droites (AB) et (a b).*

soit

$$\begin{cases} u_B - u_A = -\dot{\omega}\left(y_B - y_A\right) \\ v_B - v_A = +\dot{\omega}\left(x_B - x_A\right) \end{cases}$$

Il y a donc deux façons de calculer la vitesse de rotation :

$$\dot{\omega} = -\frac{\Delta u}{\Delta y}, \Delta y \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \dot{\omega} = +\frac{\Delta v}{\Delta x}, \Delta x \neq 0 \tag{1.1.1}$$

Comoment, puissance La puissance d'une distribution de forces $\left\{\overrightarrow{f}\right\}$ agissant sur un solide (Σ) quelconque animé d'un champ de vitesse instantané $\left\{\overrightarrow{v}\right\}$ s'exprime par :

$$\mathscr{P} = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} \, \mathrm{d}\Sigma$$

Dans le cas particulier d'un solide indéformable, la relation précédente peut être remplacée par le « comoment » du torseur de force et du torseur cinématique :

$$\mathscr{P} = \{\mathscr{F}\} \otimes \{\mathscr{C}\} = \begin{matrix} \overrightarrow{R} & & \overrightarrow{\Omega} \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ \overrightarrow{M}_A & & \overrightarrow{V}_A \end{matrix} = \overrightarrow{V}_A \cdot \overrightarrow{R} + \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{M}_A$$

C'est un invariant. Si le torseur de force est un glisseur passant par A, l'expression de $\mathscr{P}$ se simplifie en :

$$\mathscr{P} = \overrightarrow{V}_A \cdot \overrightarrow{R}$$

1.2 Double produit vectoriel

LIM01 | Difficulté = 1

- Manipulation de produits vectoriels en coordonnées cartésiennes.
- Double produit vectoriel.
- Formule de Gibbs.

1.2.1 Énoncé

Démontrer la relation suivante (formule de Gibbs) :

$$\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{u} \tag{1.2.1}$$

Déduire une expression alternative à :

$$\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) \tag{1.2.2}$$

1.2.2 Solution

On considère le plan (Π) formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ supposés non colinéaires.

On considère la base orthogonale normée $\left\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right\}$ telle que :

$$\overrightarrow{u} = u\,\overrightarrow{x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = v_x\,\overrightarrow{x} + v_y\,\overrightarrow{y}$$

La normale unitaire au plan (Π) est :

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$$

de sorte que la base $\left\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right\}$ soit orthonormée directe. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ se projette sur ce système d'axes en :

$$\overrightarrow{w} = w_x\,\overrightarrow{x} + w_y\,\overrightarrow{y} + w_z\,\overrightarrow{z}$$

Calculons la première expression de l'égalité à démontrer :

$$\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = \left[u\,\overrightarrow{x} \wedge \left(v_x\,\overrightarrow{x} + v_y\,\overrightarrow{y}\right)\right] \wedge \left(w_x\,\overrightarrow{x} + w_y\,\overrightarrow{y} + w_z\,\overrightarrow{z}\right)$$

soit

$$\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = \left[u\,v_y\,\overrightarrow{z}\right] \wedge \left(w_x\,\overrightarrow{x} + w_y\,\overrightarrow{y} + w_z\,\overrightarrow{z}\right)$$

et encore

$$\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = u\,v_y\,w_z\,\overrightarrow{y} - u\,v_y\,w_y\,\overrightarrow{x} \tag{1.2.3}$$

Calculons la seconde expression :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}\right) \overrightarrow{u} = &\left[u\,\overrightarrow{x} \cdot \left(w_x\,\overrightarrow{x} + w_y\,\overrightarrow{y} + w_z\,\overrightarrow{z}\right)\right]\left(v_x\,\overrightarrow{x} + v_y\,\overrightarrow{y}\right) \\ &- \left[\left(v_x\,\overrightarrow{x} + v_y\,\overrightarrow{y}\right) \cdot \left(w_x\,\overrightarrow{x} + w_y\,\overrightarrow{y} + w_z\,\overrightarrow{z}\right)\right] u\,\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{v}-\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{u}=u\,w_x\left(v_x\,\overrightarrow{x}+v_y\,\overrightarrow{y}\right)-\left(v_x\,w_x+v_y\,w_y\right)u\,\overrightarrow{x}$$

En simplifiant :

$$\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{v}-\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{u}=u\,w_x\,v_y\,\overrightarrow{y}-v_y\,w_y\,u\,\overrightarrow{x} \tag{1.2.4}$$

Les expressions 1.2.3 et 1.2.4 sont égales, ce qui démontre la relation initiale 1.2.1.

Pour exprimer 1.2.2, on remarquera que :

$$\overrightarrow{u}\wedge\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)=-\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)\wedge\overrightarrow{u}$$

et que donc

$$\overrightarrow{u}\wedge\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)=-\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{w}+\left(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{v}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{u}\wedge\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)=\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{v}-\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{w}$$

1.3 Théorème de Lagrange

LIM15 | Difficulté = 1

– Produit scalaire et produit vectoriel.

1.3.1 Énoncé

Démontrer la relation due à Lagrange :

$$\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2-\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)^2 \tag{1.3.1}$$

1.3.2 Solution

Soit φ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{v}$ par rapport au vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le plan $(\Pi)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. Alors le produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{w}$ perpendiculaire au plan Π et tel que :

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\sin\varphi\,\overrightarrow{z} \tag{1.3.2}$$

où $\overrightarrow{z}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à Π.

Par ailleurs, le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ est égal au produit des modules des vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment entre eux :

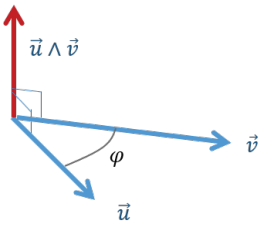


FIGURE 1.2. *Vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ formant le plan (Π) et leur produit vectoriel.*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\varphi \tag{1.3.3}$$

Procédons à la combinaison d'équations $(1.3.2)^2+(1.3.3)^2$, alors :

$$\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\sin\varphi\right)^2+\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\varphi\right)^2=\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)^2+\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)^2$$

Et donc :

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2=\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)^2+\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)^2$$

Ce qui démontre la formule de Lagrange 1.3.1.